Contents

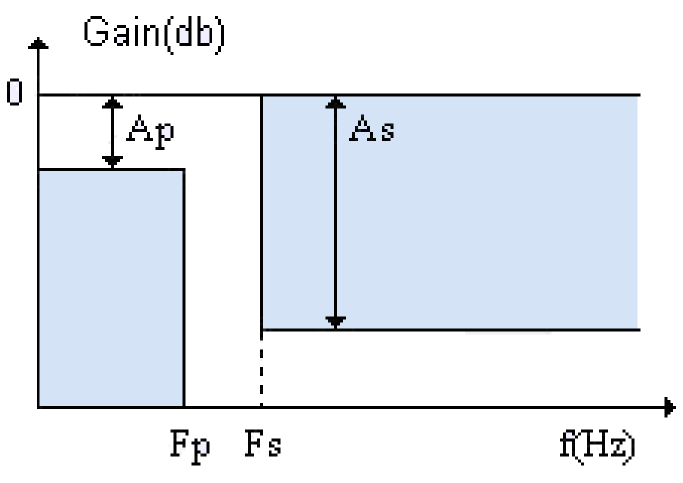
1 Noodzakelijke gegevens voor een LPF Butterworth 1
2 Definitie van een Butterworth filter 2
3 Voornaamste formules 2
3.1 Order van het filter 2
3.2 Demping in lineaire waarde 3
3.3 Order van het filter 3
3.4 Straal van de Butterworth filter 3
4 Pool lokaties 4
5 Genormalizeerde overdrachts functie 5
6 Toegepast op Sallens&Key active filter circuit 6
6.1 Denormalizeren van de componenten 6
7 Details over de gevonden formules 8

Low Pass Filter design Butterworth

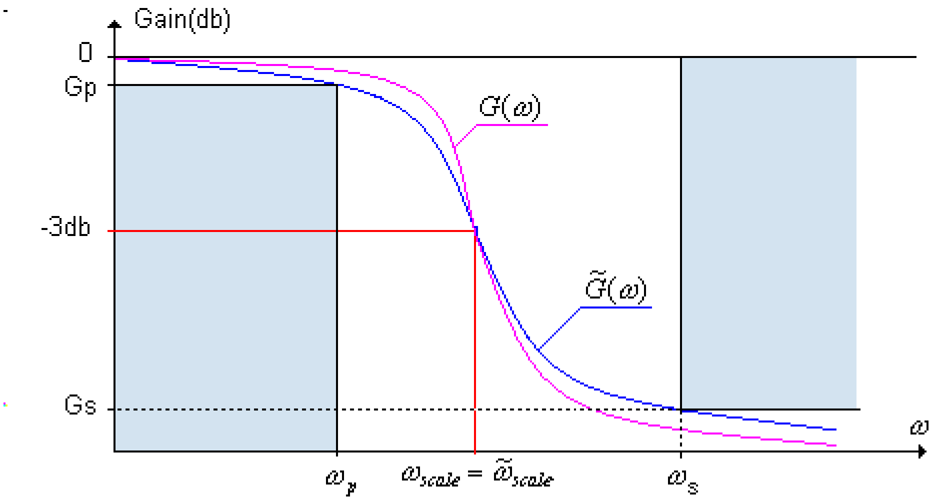
1 Noodzakelijke gegevens voor een LPF Butterworth

1) PassBandfrequentie in Hz of Rad	bv. Fp = 2kHz
2) StopBandfrequentie in Hz of Rad	bv. Fs = 4kHz
3) verzwakking bij PassBandfrequentie in dB	bv.PB = -1 dB
4) Verzwakking bij StopBandfrequentie in dB	bv. PS =-30 dB
5) Versterkingsfactor voor PassBand	bv. G = 1

Dit is weergegeven in Figuur 1 en Figuur 2



Figuur 1



Figuur 2

2 Definitie van een Butterworth filter

De definitie van een Butterworth functie is een formule die zegt dat de verhouding van het signaal na de filter (Vo) ten opzichte het signaal voor het filter (Vin) gelijk is aan

$$\frac{Vo}{Vin} = \frac{1}{\sqrt{1+(\omega/\omega o)^{2n}}} \qquad \text{n 1}$$

Hierin is $\omega = 2.\pi.f$ en $\omega o = 2.\pi.fo$. Deze fo is de frequentie waar de curve begint te dalen tot een zekere demping (-3dB). En n is het orde van de nodige filter om dit te bereiken.
Butterworth filter is gekenmerkt door een maximale vlak (maar wel neerbuigend) verloop in het passband gebied alsook geleidelijk vlak worden in het stopband gebied.
Noemen we $\omega p = 2.\pi.fp$ de frequentie waar de passband eindigt (en de transitieband begint) en noemen we $\omega s = 2.\pi.fs$ de frequentie waar de transitieband eindigt en de stopband begint dan wordt ($\frac{Vo}{Vin} = \frac{1}{\sqrt{1+(\omega/\omega o)^{2n}}}$ n 1) gelijk aan

$$\frac{Vo}{Vin} = \frac{1}{\sqrt{1+(\omega s/\omega p)^{2n}}} \qquad \text{(n 2)}$$

3 Voornaamste formules

3.1 Order van het filter

We kunnen, met wat wiskundige manipulatie uit de formule $\frac{Vo}{Vin} = \frac{1}{\sqrt{1+(\omega/\omega o)^{2n}}}$ n 1 de order van het filter, (n) naar voor brengen, namelijk door de formule om te draaien en teller en noemer te kwadrateren en dan bekomen we $\left(\frac{Vin}{Vo}\right)^2 - 1 = \left(\frac{\omega s}{\omega p}\right)^{2n}$ en vermits $\left(\frac{Vin}{Vo}\right)^2 > 1$ is dus $\left(\frac{Vin}{Vo}\right)^2 \approx \left(\frac{\omega s}{\omega p}\right)^{2n}$

En door toepassing (wat heb ik op school geleerd) als $y = a^x$ dan is $x = \frac{\log(y)}{\log(a)}$ en dus $2n = \frac{\log\left(\frac{Vin}{Vo}\right)^2}{log\left(\frac{\omega s}{\omega p}\right)}$ waar uiteindelijk volgt dat $n = \frac{\log\left(\frac{Vin}{Vo}\right)^2}{2.log\left(\frac{\omega s}{\omega p}\right)}$.

Deze formule heeft wel de eigenschap dat als in $\boldsymbol{VoVin}$=$\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{1+(\omega/\omega o)^{2n}}}}$ n 1) $\omega = \omega o$ dat dan $\frac{Vo}{Vin} = \frac{1}{\sqrt{1+(\omega o/\omega o)^{2n}}} = \frac{1}{\sqrt{1+(1/1)^{2n}}}$ en deze uitkomst is altijd $\frac{Vo}{Vin} = \frac{1}{\sqrt{1+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.707$ Maar meestal verlangen we zelf te bepalen bij welke frequentie de transitie band begint en ook eindigt. In dat geval verandert de formule $\boldsymbol{VoVin}$=$\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{1+(\omega/\omega o)^{2n}}}}$ n 1) in $\frac{Vo}{Vin} = \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2(\omega/\omega o)^{2n}}}$ en dan wordt bij $\omega = \omega o$ de formule $\frac{Vo}{Vin} = \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}$ en door ε zorgvuldig te kiezen kan ik gelijk welk getal kleiner dan 1 bepalen. Noteer wel dat dan ook de frequentie van de stopband vastligt, of , en dat is belangrijk, de orde van het filter (n) moet aangepast worden.

3.2 Demping in lineaire waarde

In ons voorbeeld

$\varepsilon = \sqrt{10^{(0.1.PB)} - 1}$

$\varepsilon = \sqrt{10^{(0.1.1)} - 1} = 0.508847$ (1)

3.3 Order van het filter

Eveneens in dit voorbeeld

$$n = \frac{log[(10^{0.1.PS} - 1)/(10^{0.1.PB} - 1)]}{2.\,log(fs/fp)}$$

$n = \frac{log[(10^{0.1.30}-1)/(10^{0.1.1}-1)]}{2.log(fs/fp)} = 3.75836$ (2)

Dus N=4

De wiskundige uitleg heb ik nader uitgelegd in een afzonderlijke paragraaf “Details over de gevonden formules

3.4 Straal van de Butterworth filter

De oplossing van de polen van een butterworth filter liggen allen evenredig verspreid op een cirkelboog aan de linkerzijde van een vectoren diagram (a+jb).

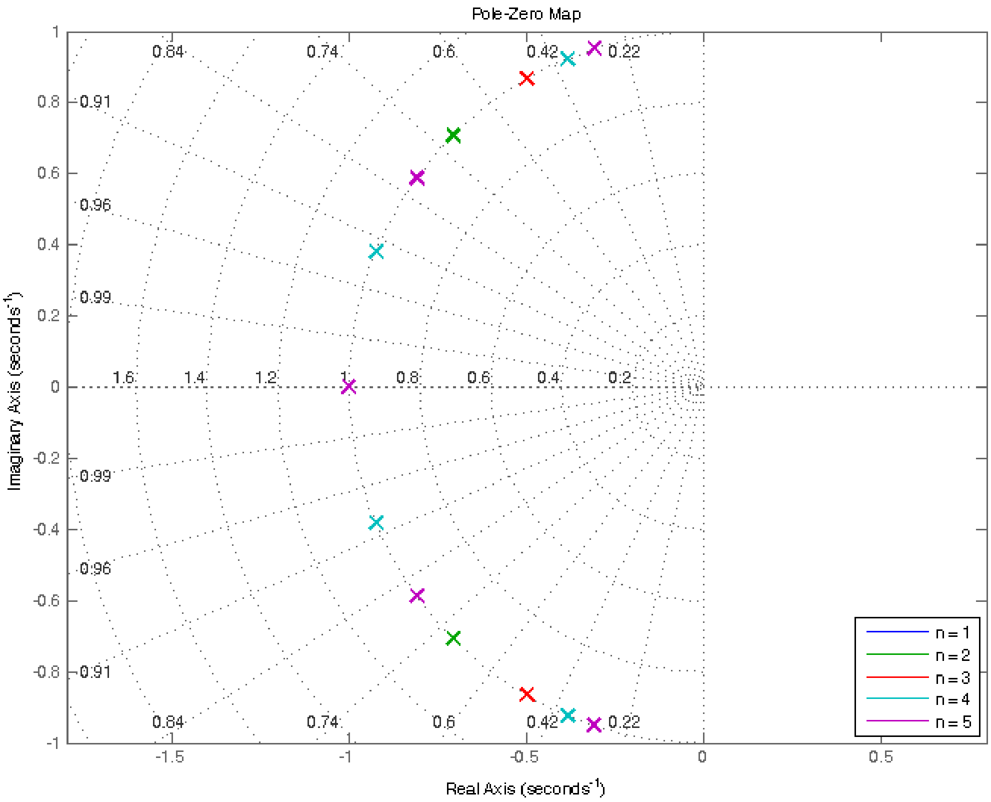


Figure 3

In deze figuur is de straal genormaliseerd tot 1, maar in werkelijkheid is de straal gelijk aan:

$R = 1/\varepsilon^{1/n}$

$R = 1/0.508847^{1/4} = 1.184$ (3)

4 Pool lokaties

Dat zijn de punten op de cirkelboog, en deze liggen verspreid op de cirkel op een afstand:

$\varphi_m = \frac{\pi.(2.m+N+1)}{2.N}$ met m = 0,1, ...(N/2-1) als N even is (N is hier gelijk aan de n^{de} orde van het filter)
Eigenlijk zegt dit niets anders dat als men een tweede orde filter heeft dat de punten op de cirkel van een vierkant in de cirkel tekent, en bij een derde orde de punten van een zeshoek tekent en van een vierde orde de punten van een achthoek enz… maar wiskundig ziet dat eruit als volgt

$\varphi_m = \frac{\pi.(2.m+N+1)}{2.N}$ met m = 0,1, ...((N-1)/2-1) als N oneven is

Voor N=4 wordt dit

$\varphi_0 = \frac{\pi.(2.0+4+1)}{2.4} = \frac{5.\pi}{8} = 1.9635$ (4a)

$\varphi_1 = \frac{\pi.(2.1+4+1)}{2.4} = \frac{7.\pi}{8} = 2.7489$ (4b)

En de punten op de cirkel zijn

$\sigma_m + j.\omega_m = R.cos(\varphi_m) \pm j.R.sin(\varphi_m)$
$\sigma_0 + j.\omega_0 = 1.184.cos(1.9635) \pm j.1.184.sin(1.9635)$
$\sigma_0 + j.\omega_0 = -0.4531 \pm j.1.0939$ (5)

$\sigma_1 + j.\omega_1 = 1.184.cos(2.7489) \pm j.1.184.sin(2.7489)$
$\sigma_1 + j.\omega_1 = -1.0939 \pm j.0.4531$ (6)

5 Genormalizeerde overdrachts functie

$$H_m = \frac{R}{(s+R)}.\frac{\prod_m(B_{2m})}{\prod_m(s^2 + B_{1m}.s + B_{2m})}$$
Hierin is *m* nog steeds gelijk aan 0,1,....

$H_0(s) = \frac{R}{s+R}$

als N oneven is, en is dit het eerste order filter
En de volgende tweede order sessies zijn

$H_m(s) = \frac{B_{2m}}{(s^2+B_{1m}.s+B_{2m})}$

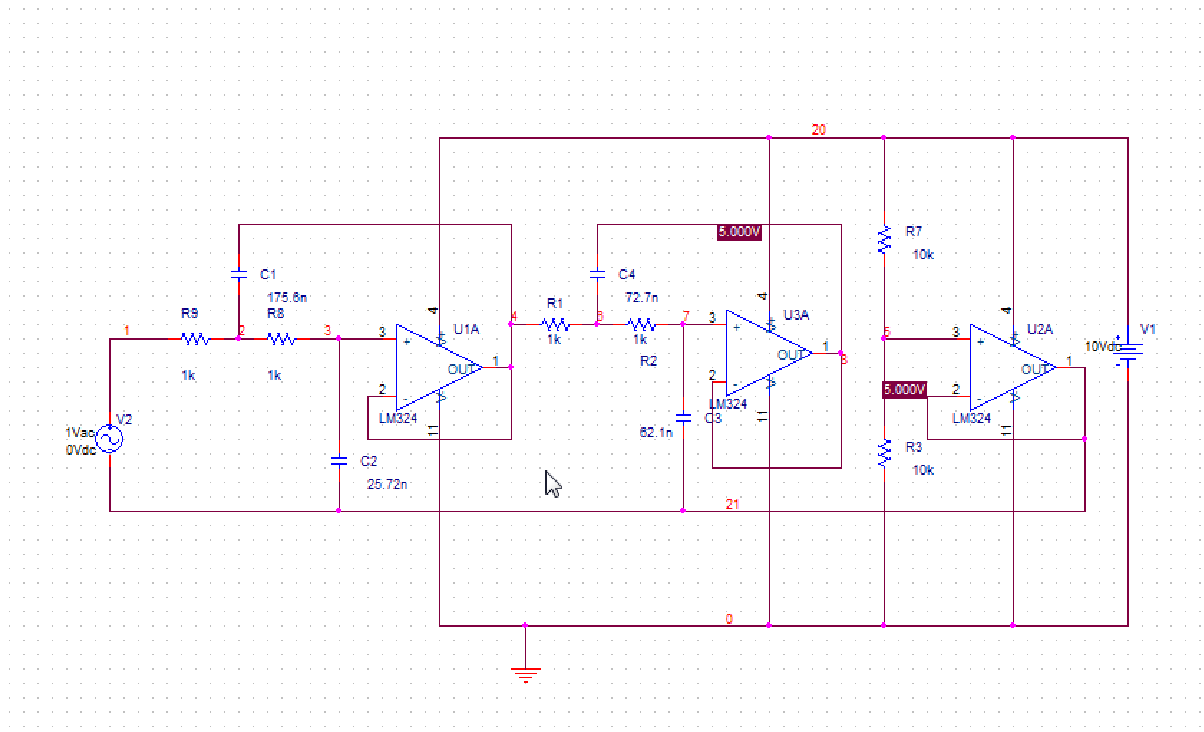
Waarin $B_{1m} = -2.\sigma_m$
En $B_{2m} = R^2$

En dus voor N=4 bekomen we dus
Geen eerste order filter dus $H_0(s) = \frac{R}{s+R}$ bestaat niet
En
$H_m(s) = \frac{B_{20}}{(s^2+B_{10}.s+B_{20})}.\frac{B_{21}}{(s^2+B_{11}.s+B_{22})}$

Met $B_{2m} = R^2$
Of $B_{2m} = 1.184^2 = 1.4018$ (7)
En $B_{10} = -2.\sigma_0 = 2.0.4531 = 0.9062$ (8a)
En $B_{11} = -2.\sigma_1 = 2.1.0939 = 2.1878$ (8b)

En dus $H_m(s) = \frac{1.4018}{(s^2+0.9062.s+1.4018)}.\frac{1.4018}{(s^2+2.1878.s+1.4018)}$

6 Toegepast op Sallens&Key active filter circuit



Figuur 1 Sallens&Key cicuit

Een Sallens&Key circuit heeft de volgende transfer functie, indien alle weerstanden gelijk aan 1 (genormalizeerd) genomen worden:

$$\frac{V_o}{V_i} = \frac{\frac{1}{C1.C2}}{s^2 + \frac{2.S}{C1} + \frac{1}{C1.C2}}$$

Hieruit volgt dat

$\frac{2}{C1} = B_{1m}$ of $\frac{2}{B_{1m}} = C1$

Dus $\frac{2}{0.9062} = C1_0$ of $2.207 = C1_0$ (9)

Zoook $\frac{2}{2.1878} = C1_1$ of $0.91416 = C1_1$ (10)

Hieruit volgt ook dat

$\frac{1}{C1.C2} = R^2$ en dus $\frac{1}{C1.R^2} = C2$ en met invullen van C1 en R volgt

$\frac{1}{2.207\ .1.4018} = C2_0$ of $C2_0 = 0.3232$ (11)

Zoook $\frac{1}{0.91416\ .1.4018} = C2_1$ of $C2_1 = 0.7803$ (12)

6.1 Denormalizeren van de componenten

Als we kiezen dat R1 = R2 = 1000 Ohm of 1000 = K

Dan wordt R’ = K.R
Zoook wordt C’ = C/K.2.π.f met f de frequentie die we genormaliseerd hebben tot 1.
Dus wordt

$C1_0'$ = 2.207/(1000.2.π.2000) =175.65 nF (13)

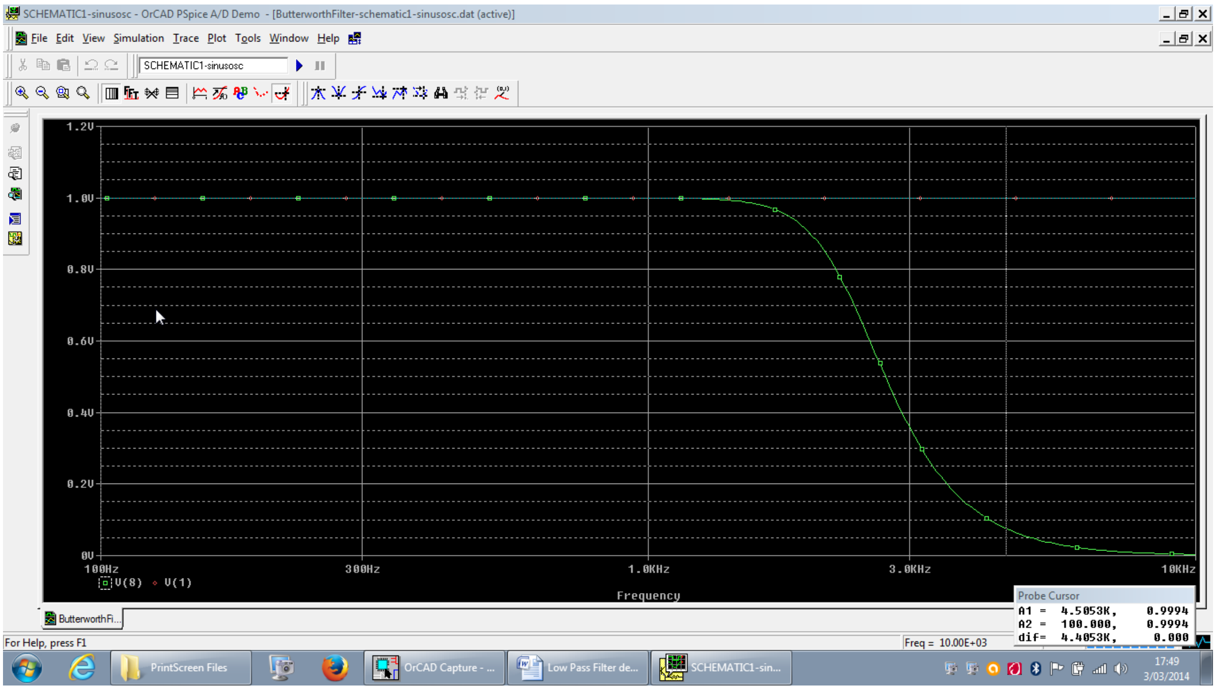
$C1_1'$ = 0.91416/(1000.2.π.2000) =72.74 nF (14)

Op dezelfde manier wordt

$C2_0'$ = 0.3232/(1000.2.π.2000) =25.72 nF (15)

$C2_1'$ = 0.7803/(1000.2.π.2000) =62.1 nF (16)

En dat zijn dan de uiteindelijke waarden die in het echte circuit moeten ingevuld worden, zoals te zien is in Figuur 1 Sallens&Key cicuit
En een simulatie uitslag is te zien in Figuur 2 simulatie Sallens&Key LPF



Figuur 2 simulatie Sallens&Key LPF

7 Details over de gevonden formules

Starten we terug van de algemene formule
$H_{C_N}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)}}$ en vullen we hierin $\omega_o = \omega_p$ dan bekomen we een uitdrukking van de verzwakking op het punt waar $\omega = \omega_p$ en noemen we dit punt Ap verzwakking (Attenuation) in de doorlaatband (Passband) uitgedrukt in *dB*. Dit betekent dat
$\frac{Vo}{Vin} = \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2\left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)^{2n}}}$ en dan is het omgekeerde in het kwadraat gelijk aan $\left(\frac{Vin}{Vo}\right)^2 = 1 + \varepsilon^2\left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)^{2n}$. En nemen we het logaritme van deze vergelijking en vermenigvuldigen beide kanten met 10 dan bekomen we:
$2.10.\,log\left(\frac{Vin}{Vo}\right) = 10.\,log\left[1 + \varepsilon^2\left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)^{2n}\right]$ Hierin zien we dat $2.10.\,log\left(\frac{Vin}{Vo}\right) = A_p$. Dit is dus de verzwakking van het signaal op het punt waar $\omega = \omega p$ en dit is uitgedrukt in $2.10.\,log\left(\frac{Vin}{Vo}\right)$ wat een dB schaal is.
En dus $A_p = 10.\,log\left[1 + \varepsilon^2\left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)^{2n}\right]$ of ook $A_p/10 = log\left[1 + \varepsilon^2\left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)^{2n}\right]$
Nemen hiervan de inverse logaritme van dan bekomen we dat
$10^{\frac{Ap}{10}} = \left[1 + \varepsilon^2\left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)^{2n}\right]$ en dus $10^{\frac{Ap}{10}} - 1 = \varepsilon^2\left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)^{2n}$ en de wortel hiervan is dan
$\sqrt{10^{\frac{Ap}{10}} - 1} = \varepsilon.\left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)$.
Noteer dat als we in deze formule $\omega = \omega_p$ (en ω_p bepalen we zelf) dat dan

En nemen we terug het logaritme van beide kanten van de vergelijking dan is $\sqrt{10^{\frac{Ap}{10}} - 1} = \varepsilon$

$$log\sqrt{\left(10^{\frac{Ap}{10}} - 1\right)} = log\left(\varepsilon.\left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)^n\right) \qquad (1)$$

Op analoge wijze bekomen we voor de verzwakking op het punt waar $\omega = \omega_s$ en noemen we dit punt A_s de verzwakking in de stopband dan is

$$log\sqrt{\left(10^{\frac{A_s}{10}} - 1\right)} = log\left(\varepsilon.\left[\left(\frac{\omega}{\omega_s}\right)^n\right]\right) \qquad (2)$$

Delen we nu **(2)/(1)** en we maken hierbij ook gebruik van de algemene formules zoals in het begin van dit hoofdstuk aangehaald dan is

$$\frac{log\sqrt{\left(10^{\frac{A_s}{10}}-1\right)}=log\left(\varepsilon.\left[\left(\frac{\omega}{\omega_s}\right)^n\right]\right)}{log\sqrt{\left(10^{\frac{Ap}{10}}-1\right)}=log\left(\varepsilon.\left[\left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)^n\right]\right)}$$ en dit is dan gelijk aan

$$log\sqrt{\frac{\left(10^{\frac{A_s}{10}}-1\right)}{\left(10^{\frac{Ap}{10}}-1\right)}} = log\left(\frac{\omega_s}{\omega_p}\right)^n$$. Hieruit volgt natuurlijk dat

En uiteindelijk

$$n = \frac{\log\sqrt{\frac{\left(10^{-\frac{A_S}{10}}-1\right)}{\left(10^{-\frac{A_p}{10}}-1\right)}}}{\log\left(\frac{\omega_S}{\omega_p}\right)}$$ en dat is dan de formule om het order van een Butterworth filter uit te rekenen.

Noteer dat A_p en A_s in dB worden uitgedrukt, en vermits het verzwakkingen zijn is dit steeds een negatief getal.

Jan Spaenjers